數學傳播　49卷4期, pp. 3-16

機率學者看量子力學 (五)

謝南瑞

人儘管抽籤問卜 ···

所羅門王 950 BC

宇宙最不可理解之處 ···

愛因斯坦 1936

6. 物理學之公理的數學處理 ···

希爾伯特 1902 的第六個問題

前言:

本文若是刊出, 將是西方聖誕季, 所以作者在此文中, 試著回顧和討論量子力學的一些重要敘述, 除了說明其內涵之外, 我們也討論它們的爭議, 特別是波爾和愛因斯坦兩位之間。這些爭議, 主要是基於命定性和隨機性, 以及實存性和量測性的哲學乃至神學觀點的不同。在前文中 (註: 指作者的此系列文章) 已經有述及, 在十九世紀末, 以牛頓力學爲骨幹的古典物理, 已經被發展到極致, 以致於相關研究者不禁感覺, 不再有重要議題須進行, 只須再精進量測技術, 即可矣。但是, 二十世紀初出現的蒲朗克黑體輻射之論文, 使一切改觀。1900∼1925 年, 通常被稱爲舊量子理論 (Old Quantum Theory) 時期, 這段時期, 量子現象及量子力學的物理理論不斷地被引入, 許多辯論和哲學問題也熱烈進行。相關物理學者也陸續地獲得諾貝爾物理學獎的桂冠。量子力學的數學理論則歸功於狄拉克 (P.A.M. Dirac) 和馮紐曼 (John von Neumann) 的 1930 年代經典著作。

(一) 回顧: 數學定式和討論

目前的量子力學的數學定式, 是基於泛函分析與機率。予某個量子系統, 其所有量子態是在一個佈於複數系之有限維或無限維的可列分希爾伯特空間, 每個單位長向量代表此系統的一量子態, 一組正規基底 (此基底是有限或可列的無限) 被稱爲一個純態基, 而每個量子態皆是此純態基的疊加 (線性組合)。此系統的總能量, 稱爲系統的哈米爾敦量 (Hamiltonian) H。量子

力學是以薛丁格方程作主方程的動力系統。先前提到的希爾伯特空間, 都是有限維, 我們現在考慮 $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ 所有複數值二次可積分函數的全體; 即以下之 f, 所形成的集合

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x_1,x_2,x_3)|^2 d(x_1,x_2,x_3) < \infty$$

內積爲

$$(f,g)=\int_{\mathbb{R}^3} f(x_1,x_2,x_3)\bar{g}(x_1,x_2,x_3)d(x_1,x_2,x_3).$$

我們常用的一純態基爲厄米多項式 (Hermite Polynomial; Charles Hermite (1822∼1901)) 所形成: 令

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R};$$

適當的推廣, 可以得到三變量 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$。$\{H_n(x), x=(x_1,x_2,x_3) : n=0,1,2,3,\ldots\}$ 形成 $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ 的純態基。

在某個時空點對量子系統作某種觀測, 即爲用某個厄米 (即共軛對稱) 算子 T $(T=(\bar{T})^t)$ 作用於此系統之量子態 ϕ, $T\phi$, 觀測得到的是此算子的某個特徵值 a (由共軛對稱性, 此值爲實數)。L_a 爲對應於 a 的特徵函數所形成封閉子空間, 而觀測到 a 值的機率是 $|(\phi,\phi_a)|^2$, ϕ_a 是 ϕ 在子空間 L_a 的射影。

而此量子系統即坍塌成此特徵值。系統必然坍塌, 因爲機率爲 1。

若是此系統只由一個質量爲 m 的粒子構成, 且總能量 H 可以明示爲動能加位能, 如下

$$H(t,x)=\Delta_x+V(t,x);\quad t\geq 0,\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$

則薛丁格方程式即前文所論述的

$$(i\hbar)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}=\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Big)\Delta_x\psi(t,x)+V(t,x)\psi(t,x). \tag{1.1}$$

波函數 $\psi(t,x)\in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$, $\forall\ t$。

由偏微分方程的數學理論, 我們可以討論上式的廣義解 (generalized solution, 又稱 weak solution), 或者是真正解 (genuine solution, 又稱 strong solution)。若是此系統由 n 個粒子構成, 則 (1.1) 爲一個 n 方程組, V 爲 n 階方陣, 而方程組中的波函數則是 $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n)$, 而每個 ψ_j 是如下 (1.2) 的解：

$$(i\hbar)\frac{\partial\psi_j(t,x)}{\partial t}=\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Big)\Delta_x\psi_j(t,x)+\sum_k V_{jk}(t,x)\psi_k(t,x). \tag{1.2}$$

若是此系統只由一個粒子構成, 而此系統之總能量 H 不明示爲動能加位能, 且時間不明示爲 H 的變量 (註: 哈米爾敦力學中的路維爾定理 (Liouville Theorem)), 則薛丁格方程式以

常微分方程的展發方程式 (Evolution Equation) 形式表示：$\{H_t\}_{t\geq 0}$, 是一個由 $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ 上一些么正變換 (unitary transformations) 所形成的半群,

$$\frac{\partial H_t\psi}{\partial t}=\Big(\frac{-im}{\hbar}\Big)H_0\psi,\quad \psi\in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}). \tag{1.3}$$

上式的解是

$$H_t\psi=e^{\big(\frac{-im}{\hbar}\big)(H_0\psi)t}. \tag{1.4}$$

若此系統是由 n 個粒子構成, 我們仍然可以適當修改上述的展發方程式。有關展發方程式的進階數學理論 (Hille-Yosida 算子半群論), 可以參考 [14] 第九章。

討論: **1.** 令 $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 爲 $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ 上的一個給定的純態基。對 $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ 上的一個么正變換 A, 令 $A_{mn}=(\phi_m,A(\phi_n))$, 則無窮矩陣 $[A_{mn}]$ 爲一個厄米矩陣 $(A=(\bar{A})^t)$。我們把薛丁格方程式 (1.3) 用於位置算符和動量算符

$$P_j(\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x_j},\quad Q_k(\psi)=x_k\cdot\psi,\quad j,k=1,2,3,$$

可得到前文所提到的海森堡矩陣力學關係式

$$P_j(t)Q_k(t)-Q_k(t)P_j(t)=\Big(\frac{-i\hbar}{m}\Big)\delta_{jk}, \tag{1.5}$$

前文也提到薛丁格的論文尚未發表時, 海森堡已經發表他的矩陣力學論文, 所以海森堡發展矩陣力學, 是基於另一個思維; 讀者可以參考高涌泉教授在台大科教中心 CASE 的影片 [b]。

2. 量子坍塌的現象, 迥異於古典力學, 且量測的機率, 即隨機性, 是量子力學的內稟, 更是違反古典力學的聖約。是否代表量子力學缺乏某種完備性, 以致如是, 於此, 波爾 (哥本哈根學派的創始人), 加上海森堡和波恩 (Max Born), 對上了愛因斯坦, 兩人的世紀大辯論, 出現在第五屆索維爾大會, 見後節。

3. 物理量測所得到的, 都是實數值, 但是, 虛單位 i 出現於薛丁格方程式, 以及我們的向量空間是佈於複數系, 是否是自然的選擇? 這個大哉問, 作者只能簡答如下:

3.1. 若是 (1.1), (1.2) 中沒有虛單位 i, 則成爲基本的擴散 (diffusion) 方程。對應於機率論中的維納 (Norbert Wiener) 過程和 Ornstein-Uhlenbeck 過程 (前者 V 恆爲 0; 後者 $V=V(x)$), 見前文提到的 [11] 之第 5 節和第 9 節。

3.2. 若實數值 $f\in L^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$, 則傅立葉變換

$$\hat{f}(\xi):=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)e^{i(\xi,x)}dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^3,$$

處處有定義而且爲複數值, $\hat{f} \in L^1((\mathbb{R}^3, d\xi), \mathbb{C})$。又, 若是實數值 $f, g \in L^1 \cap L^2$, 則有

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(\xi)\bar{g}(\xi)d\xi = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)g(x)dx \quad \text{(Parseval 等式)}.$$

是以, $L^2((\mathbb{R}^3, d\xi), \mathbb{C}) \triangleq L^2((\mathbb{R}^3, dx), \mathbb{R})$, 符號 $\triangleq$ 代表兩空間距同構 (isometry)。以上的 Parseval 等式可以參考 [8] 167 頁。我們上述的波函數以及薛丁格方程式 (1.1), 數學上, 是在 “波空間” $L^2((\mathbb{R}^3, d\xi), \mathbb{C})$ 的框架內 (註: 考慮 f 是個有週期的訊號, 則它的傅立葉變換就對應傅立葉級數, 是 f 的頻譜的疊加, 頻譜即是波的物理概念), 所以虛單位 i 出現於薛丁格方程式是自然的。

物理學者對這個問題 (量子力學是否必須以複數爲內涵) 也有興趣。2021 年有理論物理學者 Marc-Olivier Renou 和 Nicolas Gisin 以及六位合作者在 Nature 發表論文, 設定一個實驗, 說明複數必是內涵, 此實驗也確已實現; 然而, 在今 (2025) 年, 分別在德國和法國, 都有量子理論的實數版本被提出, 且有基於量子計算的觀點來支持。讀者可看網路資料 [c]。

(二) 大辯論: 哥本哈根詮釋 vs. 局域實存性

自從蒲朗克提出量子的概念之後, 波爾1913 年提出原子的量子理論, 且依此所得的氫原子之電子能階, 符合數學者 Johann Balmer (1825∼1898) 於 1885 年之計算。他也提出對應原理 (correspondence principle, 1920 年) 和互補原理 (complementarity principle, 1927 年)。

對應原理: 當系統的量子數 (quantum number) 相當大時, 基於量子力學的系統行爲預測, 和基於古典力學的系統行爲預測是一致的。

互補原理: 對微觀系統, 某些共軛或互補的量對, 不可能同一時被觀測到; 例如: 波動性和粒子性, 動量和位置, 能量大小和量測時間。海森堡測不準原理就是典型範式。

這兩個原理, 加上前文中所述波恩之量子量測的機率觀點, 構成量子力學的哥本哈根詮釋 (Copenhagan interpretation) 的哲學基礎。

另一方面, 愛因斯坦提出光量子 (light quantum, 即光子 photon), 作爲光電效應之物理解釋的基石。波爾與愛因斯坦兩人都是量子力學的立基者, 也都接受海森堡的矩陣力學和薛丁格的波動力學, 同爲量子力學的數學定式。但是, 兩人對波函數, 是否爲物理實存, 看法大相庭異。愛因斯坦無法接受無量測即不存在和以機率爲內稟的觀點, 他相信的是如下之古典力學與相對論的哲學基礎。

局域實存性 (local reality): 由於光速是速率的上限, 所以量測須有局域性 (locality), 亦即, 在某時地所進行的物理量測, 其影響只及於此時地的光速範圍之內, 超局域之鬼魅似的行

爲 (spooky action) 是不可能發生的。再者, 我們所觀測的, 必須是物理實存 (physical reality); 例如, 月亮, 縱使我們不作量測, 它也是在那裡。

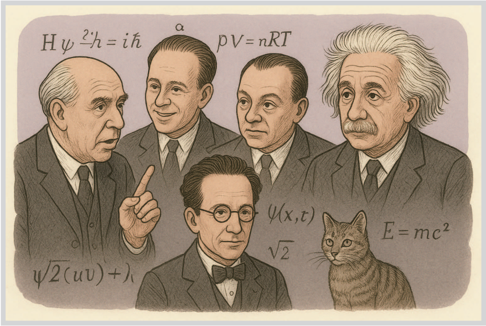
兩人有許多針鋒相對的對話, 以 1927 年第五屆索維爾會議 (5th Solvay Conference) 的辯論爲高峰; 有關此會議的傳說很多, 作者推薦參考資料 [10] 第 11 章, 此書有完整的考據來源。由於第一次世界大戰之後, 德國受到國際的孤立, 愛因斯坦是會議主席 Hendrik Lorentz (1853∼1928, 1902 年獲諾貝爾物理學獎), 經過比利時皇帝的特准, 惟一受邀與會的德籍學者。若是讀者查 ChatGPT, 可以看到如下的一些名句, 但是, 是否真是出自此場合, 未必如此;

愛因斯坦 : 上帝不玩骰子 !

波爾 : 嗳, 不用告訴我, 上帝對你說什麼 !

海森堡和波恩, 是在波爾的一方, 薛丁格則是似在中立的立場;

薛丁格 : 我抱歉, 但是我寧願此和我無關。

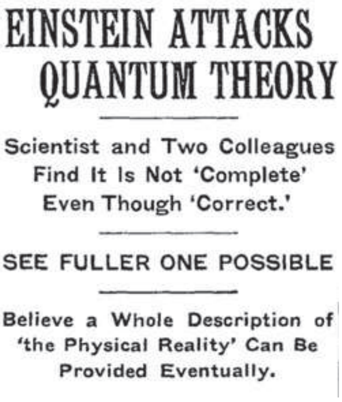


此處三張 AI 圖片, ChatGPT (上左) Gemini (上右), Gemini - Nano Banana (下), 供讀者一笑。

在會議中, 愛因斯坦並沒有發表演講, 依 [10] 第 11 章所述, 他在波爾及其他三位演講者之後, 起身向主席 Lorentz 表示他要說些評論。隨後, 愛因斯坦展現他的思想實驗, 他是以狹縫實驗, 說明光子或電子, 經過狹縫, 打到後方的感應板, 如何觀測波動性和粒子性並存。波爾也以另一個可開閉狹縫的思想實驗, 來說明他的互補原理; 在 [10], 263-273頁, 有兩人所提思想實驗的內容和圖示。我們在此須了解, 量子力學的實驗室技術是 1970 年代後才發展, 而有捕捉以及發射單個光子與電子的實驗儀器; 今年 (2025), 麻省理工學院宣佈, 它的物理實驗室, 成功作出波爾的思想實驗, 給了百年爭議一個實驗結論, 參考 [a]。

(三) EPR 悖論

1935年 5 月4日, 紐約時報刊登了一篇報導, 標題如下 (取自 Wikipedia: EPR Paradox)


EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

Scientist and Two Colleagues Find It Is Not 'Complete' Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

Believe a Whole Description of 'the Physical Reality' Can Be Provided Eventually.

此報導, 是指作者在前文中, 提到的愛因斯坦及兩位同事的著名論文 [6]。此論文很精簡, 只有兩節; 沒有提到任何人名, 也沒有提供任何的參考文獻。但是, 由於它發表的時間, 是本文第二節所述之索維爾大辯論之後 8 年, 明眼人都可看出這是愛因斯坦對哥本哈根學派的書面反擊。論文第 1 節, 先敘明作者對於物理實存的基本觀點, 以斜體字強調: 若是在不擾動一物理系統的情況下, 我們可以確定地, 即是以機率 1, 預測出某物理量的值, 則我們就認爲此物理量有物理實存。作者進一步, 考慮自由度爲 1 的物理系, 即一直線上單粒子的量子系統。小寫 x 表此系統的座標。考慮波函數

$$\psi(x) = e^{(i/\hbar)p_0 x},$$

上式中, p_0 爲一定值。我們知道, 此量子系的的動量爲算子

$$P(\cdot) := (-i/\hbar)\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \quad (\text{註: 時間參數 } t \text{ 已經含在 } x \text{ 中}),$$

是以,

$$\frac{d\psi}{dt} = p_0\psi.$$

因此, 動量有確定值 p_0。亦即, 此系統的動量是實存的。

另一方面, 此系統的位置算子

$$Q(\cdot) := x \times (\cdot),$$

是以, 任何定值 a,

$$Q(\psi) \neq a\psi.$$

此系統的位置, 在區間 (a, b) 之對應機率爲

$$\mathbb{P}((a,b)) = b - a, \quad \forall\ \infty < a < b < \infty.$$

此爲直線上的均勻分佈。是以, 由 Q 所決定的位置, 沒有物理實存。此討論可以推廣成: 由兩個不可交換之算子 A, B 所各自決定的物理量; 對 A 的確定知識必排除了對 B 的確定知識; 反之, 對 B 的確定知識必排除了對 A 的確定知識。是作者再以斜體字敘述: 要嘛 (1) 由波函數所描述的量子力學理論是不完備, 要嘛 (2) 由兩個不可交換之算子 A, B 所各自決定的物理量不能有同時的物理實存。

第 2 節, 是文章的精華; 設定, 兩個物理系統, 仍是考慮自由度爲 1, I 與 II, I 的位置座標爲 x_1 且 II 的位置座標爲 x_2, 在時區間 $[0, T]$ 內有交互作用, 且兩者在過去 $(-\infty, 0)$ 的狀態爲已知; 但是在時區 (T, ∞), 沒有交互作用。對任一時刻 $t > T$, 考慮系統 I + II 的波函數 $\Psi(x_1.x_2)$: 令 A 表專屬於 I 的某物理量, 且 A 的位置座標爲 x_1。再者, 以 $a_1, a_2, \ldots$ 表 A 的特徵值, $u_1(x_1), u_2(x_1), \ldots$ 爲對應的特徵函數。令 B 表專屬於 I 的另一物理量, 以 $b_1, b_2, \ldots$ 表 B 的特徵值, $v_1(x_1), v_2(x_1), \ldots$ 爲對應的特徵函數。系統 I + II 的波函數 Ψ 有以下兩種表達式

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{3.1}$$

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x_2) v_m(x_1). \tag{3.2}$$

式 (3.1) 代表對於 $u_1(x_1), u_2(x_1), \ldots$ 的正交展式, 當 A 被觀測到爲 a_n 時, I 的狀態爲波函數 $u_n(x_1)$ 而 II 的狀態則是波函數 $\phi_n(x_2)$。

式 (3.2) 代表對於 $v_1(x_1), v_2(x_1), \ldots$ 的正交展式, 當 B 被觀測到爲 b_m 時, II 的狀態爲波函數 $\psi_m(x_2)$ 而 I 的狀態則是波函數 $v_m(x_1)$。

作者再度以斜體字強調 : 以上說明了, 對同一物理實存, 可以賦予兩個不同的波函數。現在, 將此應用到第 1 節中的系統, 考慮, 兩個單位質量的粒子 I, II 於時間 $t = 0$ 於直線軸座標爲 x_0 的點, 且有交互作用; 兩粒子分別往相反 (註: 此爲作者所加, 循 John Bell 在其里程碑論文, 亦即 [1] 之第二篇) 的方向運動, 交互作用持續到某時刻 $t = T > 0$ (註: 此爲作者所

加), 於 $t > T$ 之後, 就不再有交互作用, 系統 I + II 的波函數, 可以表成積分形式 :

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp. \quad \text{(註: 時間參數 } t \text{ 已經含在 } x_1, x_2 \text{ 中)。} \tag{3.3}$$

上式中, p 爲系統的動量, 我們也將式 (3.1) 改寫成

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p(x_2) u_p(x_1) dp,$$

上式中,

$$\phi_p(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i/\hbar)(x_2 - x_0)p} dp. \quad \text{(註: 這用到泛函分析中之連續型光譜理論)。}$$

然而, 上式恰爲系統 II 之動量算子對應於特徵值爲 $-p$ 的特徵函數。另方面, 令 B 爲系統 I 的位置算子, 則其對應於特徵值爲 x 的特徵函數爲 delta 函數 $\delta(x_1 - x)$ (註: 這其實是泛函分析中之光譜理論中的奇異測度部分 : 泛函分析中光譜理論由三部分構成, 離散、絕對連續和奇異)。另一方面, 我們也將式 (3.2) 改寫成

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x(x_2) v_x(x_1) dx,$$
$$\psi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i/\hbar)(x - x_2 + x_0)p} dp = 2\pi\hbar\delta(x - x_2 + x_0).$$

上式代表的是系統 II 對應於特徵值 $x + x_0$ 的的位置算子 Q

$$Q(\cdot) := x_2 \times (\cdot).$$

是以, 觀察系統 I 的物理量, 或者 A 或者 B, 我們自動地得到系統 II — 沒有任何地擾動它 — 的或者動量 P (即, p_n) 或者位置 Q (即, q_m), 亦即, 對系統 II, 動量 P 和位置 Q 有同時的物理實存。然而, 對系統 II, 我們也有

$$PQ - QP = (-i)\hbar.$$

是以, 兩算子非可交換。我們得到以下; 由第 1 節, 設若量子力學理論是完備的, 觀察系統 II 的物理量, 或 A 或 B, 我們由兩個不可交換之算子 A, B 所各自決定的物理量不能有同時的物理實存。作者寫道 : 我們是以只有被迫地認爲量子力學之波函數 — 以及其機率解釋 (註: 此爲作者所加) — 理論是不完備的。作者也再以斜體字強調 : 若是某人堅持, 兩或多個物理量, 只有在能同刹那量測或預測, 才能說有或沒有並存的實存性質, 是則這人將不會有此看法。論文以如下結束: 然而, 我們相信一個量子力學的完備理論是可能的。

此論文所述的情節, 以 EPR 悖論之名傳世。波爾在三個月後在同一期刊, 以同一文題, 作出回應 [2]。他點明, 愛因斯坦及其合作者, 所提出的明顯矛盾, 只是顯示了自然哲學的通常觀

點, 基本上不適於我們在量子力學所碰到的物理現象之合理內涵。事實上, 基於量子行爲的確切存在, 在受測物和量測者彼此之間的有限交互作用 (這幾個字他也用斜體字強調), 且受測物對量測儀器的不可控制之反應, 蘊含了最終必要放棄因果律的古典思維, 且將我們對物理實存的態度, 作一大幅度地修改。回應文的其餘部份, 一是以實驗說明其觀點, 二是詳細說明互補原理。兩位大師, 明顯的在量子力學的哲學觀有對立。薛丁格在同年也發表了兩篇文章, 討論此主題, 且將愛因斯坦文章中所描述的, 稱爲量子糾纏 (quantum entanglement)。

1953 年, 愛因斯坦在波恩的榮退會上, 再度發表短文 [4]; 在此短文的結尾段之前, 他敘述: 薛丁格方程之可接受的解釋, 是由波恩所提出的機率解釋 (註: 文章用的是 statistical interpretation), 然而, 這不是個別系統的真實描述, 而只是系綜 (ensemble) 的統計預測。結尾段則是以如下開始: 依我看來, 此種理論框架作爲物理學的基礎, 並不令人滿意 ······。

(四) 量子科技的催生者: 約翰貝爾

約翰貝爾 (John S. Bell, 1928∼1990) 是歐洲核子研究組織 CERN 的工程師, 但是他對量子力學和量子哲學一直保持極大興趣, 也發表了一些論文, 1987 年, 應劍橋大學出版社的邀請, 把歷年發表的文章結集成書, 收入出版社的量子哲學文集。1990 年貝爾不幸突然逝世。2004 年, 劍大出版社出版修正二版且請 Alain Aspect (1947∼, 2022 年與 John Clauser, Aton Zeilinger 共同獲諾貝爾物理學獎) 撰寫前言 (Introduction)。此書的第二篇最爲著名, 也是公認的貝爾劃時代的貢獻, 本小節就以此爲主要論述。但是, 我們先闡述另一篇。

該書的第一篇, 也是貝爾的第一篇量子力學/哲學論文, 在數學上也很重要, 它說明了馮紐曼的 1932 年德文/1955 年英文經典著作 [12] 中的一個主要錯誤, 貝爾使用的版本, 是我們熟知的 1955 年英文版。馮紐曼在其書的序言中的第 x 頁, 敘述他在書中將推導, 所謂隱變量 (或云隱參數, 此概念源於前節所述的不完備性), 和量子力學的某些定性的基本假設並不相合 (incompatible); 書內的第 209 頁, 他再敘述一次; 其證明在書的 305-324 頁, 其後至 328 頁, 則是相關的評述。馮紐曼所稱的某些定性的基本假設, 指書中 B' (311頁), I (313頁) 和 II (314頁)。馮紐曼的這些假設, 是指可觀測量 (厄米算子) 的實係數線性組合也是可觀測量, 且後者的期望值也是相對應之期望值的線性組合。馮紐曼書中所稱之可觀測量 A 對任一態 ϕ 的期望值 (注意: 此名詞!), 記爲 $\mathrm{Exp}\,(A;\phi)$, 出現於 203 頁, 即爲內積 $(\phi, A\phi)$ (A 是厄米算子, 是以此內積必爲實數值)。貝爾指出, 當 ϕ 爲量子力學中的態時, 此種加性假設, 是合理的; 但是, 當 ϕ 爲所謂零散布態 (dispersion-free state), 亦即, $(\phi, A^2\phi) = [(\phi, A\phi)]^2$ (A^2 也是厄米算子), 此種加性假設, 是不合理的 : 前式恆有“左≥右”, 而 ϕ 只有當它是 A 的特徵函數時, “=” 號才成立, 而值爲對應 ϕ 之特徵值的平方。貝爾注意到: 對兩個可觀測量 A, B 當兩者不可交換 ($AB \neq BA$) 時, 要驗證 $A + B$ 的零散布態, 利用加性是不正確的, 且實務上, 也是錯誤的, 他以 Stern-Gerlach 實驗 (研究銀原子通過不均勻磁場時產生偏折 (inflection) 的

量子行爲; Otto Stern (1888∼1969) 獲 1943 年諾貝爾物理學獎) 爲實例, 說明錯誤所在。

第二篇的標題就是論 EPR 悖論。在論文的第 1小節, 貝爾作一簡短回顧和文章的目標。在第 2 小節, 他考慮一對自旋各爲 $1/2, -1/2$ 的粒子, 形成一 singlet, 以式子表示, 爲

$$\frac{(1,0)\otimes(0,1)+(0,1)\otimes(1,0)}{\sqrt{2}}. \tag{4.1}$$

此粒子對, 開始時位於空間 $\mathbb{R}^3$ 中的原點, 然後兩粒子分別朝, 例如沿 x-軸, 的相反方向運動, 直到離得足夠遠, 再分別對此兩粒子, 於某個共同時刻, 作自旋的觀測, 得到量測值 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$; $\vec{a}, \vec{b}$ 爲兩個 $\mathbb{R}^3$ 中的單位長向量。假定有一個隱變量 λ 來描述此二量測值, 且假定局域性, 則, 我們可以利用下式來表達在多次量測後的期望值, 用我們熟悉的機率論符號

$$\mathbb{E}[\vec{a},\vec{b}] = \int A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)F(d\lambda); \tag{4.2}$$

其中, $F(d\lambda)$ 爲一個機率分布函數。由 singlet 的定義, 上式爲

$$\mathbb{E}[\vec{a},\vec{b}] = -\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{4.3}$$

在第 3 小節, 貝爾說明了對兩粒子個別作自旋量測和隱變量 λ 確爲實務可行。在第 4 小節, 貝爾論證, 前式 (4.3) 會有矛盾: 由 (4.2) 所定出的期望值有下列蘊含式

$$\mid \mathbb{E}[\vec{a},\vec{b}] + \vec{a}\cdot\vec{b} \mid \le \varepsilon \;\Rightarrow\; \varepsilon \ge \frac{\sqrt{2}-1}{4}. \tag{4.4}$$

在此證明中, 貝爾引入第三個單位長向量 $\vec{c}$, 且考慮 $\mathbb{E}[\vec{a},\vec{b}]$, $\mathbb{E}[\vec{a},\vec{c}]$, $\mathbb{E}[\vec{b},\vec{c}]$。利用前述關係式 (4.2), 貝爾計算得

$$\mid \mathbb{E}[\vec{a},\vec{b}] - \mathbb{E}[\vec{a},\vec{c}] \mid \le 1 + \mathbb{E}[\vec{b},\vec{c}] + (\varepsilon+\delta),$$

其中, δ 爲使

$$\mid \vec{a'}\cdot\vec{b'} - \vec{a}\cdot\vec{b} \mid \le \delta$$

成立的正數; 而

$$\mid \vec{a} - \vec{a}' \mid < \delta_0, \qquad \mid \vec{b} - \vec{b}' \mid < \delta_0,$$

δ_0 是一個可以很小的正數。由此 Bell 推導出 (4.4)。(4.4) 證明了 (4.3) 不可能成立。貝爾於是斷言: *在局域性的假設下*, 量子力學不可能有實存性。先前, 馮紐曼的書中, 並不假設局域性 (這是動力學的物理特性), 僅只利用數學的一般假設作推導, 以致書中的證明有誤。

貝爾此篇論文, 迅速地引起物理學界的注意。如他自己所言, 他的文章也只是數學論證, 所以他文中所述的情境, 是否確實可以用實驗來檢視? 成爲實驗物理學者的追尋目標。於 1970 年之後, 有關的實驗論文就大量出現了。(4.4), 以及在貝爾此篇論文之後, 出現的許多相關的不等式, 通常被稱爲貝爾不等式 (Bell Inequalities)。目前所通用的貝爾不等式, 是如下的形

式, 也被稱爲 CHSH 不等式, 是以論文 [3] (注意此論文的標題) 的四位作者姓之英文第一字母爲名。我們在此的呈現, 是循 [13], 114-117 頁, 這是一本被廣爲採用的量子科技教科書。我們以 A, B, C 表示貝爾論文中三個向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的起始位置, 分別代表三個虛擬人名 Alice, Bob, Charlie, 也是量子實驗中最常用到的。設若三人位於空間 $\mathbb{R}^3$ 中 $A(x,0,0), B(-x,0,0), C(0,0,0); x>0$。Alice, Bob 兩人各有兩套儀器, Alice 手上的是 Q, R; Bob 手上的是 S, T。Charlie 準備好一對粒子, 就把這對粒子中的一個送予 Alice, 另一個送予 Bob, Alice 一收到粒子, 就丟個銅板, 依據出現正面反面, 執行量測 Q, R; Bob 對他的 S, T 也做同樣的工作。假設量測值都是 ± 1; 考慮以下的關係式

$$QS + RS + RT - QT = (Q+R)S + (R-Q)T. \tag{4.5}$$

由於 Q, R 值都是 ± 1, $(Q+R)S$ 和 $(R-Q)T$ 兩者中恰有一爲 0。如果是 $(Q+R)S = 0$ 則 $R = -Q$, 是以 (4.5) $= \pm 2$; 如果是 $(R-Q)T = 0$ 則 $R = Q$, 是以仍有 (4.5) $= \pm 2$。我們以 q, r, s, t 表示 Q, R, S, T 於量測時出現的量測值, 於多次量測後, 我們有如下的期望值 (機率來自 Charlie 的準備工作, 和 Alice, Bob 的丟銅板, 以及整個執行中的可能外界干擾)。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[QS] + \mathbb{E}[RS] + \mathbb{E}[RT] - \mathbb{E}[QT] &= \mathbb{E}[QS + RS + RT - QT] \\ &= \sum_{q,r,s,t} \mathbb{P}(q,r,s,t)(qs + rs + rt - qt) \\ &\leq \sum_{q,r,s,t} \mathbb{P}(q,r,s,t) \cdot 2 = 2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.6) 的第一項, 意謂, 當 Alice 和 Bob 兩人在見面時, 比對各人手上累積的數據, 確實可以作數值相乘再作平均。注意: 到目前爲止, 我們的情境構思和計算, 和量子力學無關。

現在, 回到量子力學以及量子量測 : Charlie 所送出的粒子對是 singlet, Alice 和 Bob 所作的是粒子沿著某方向的自旋, 即

$$\vec{v} \cdot \vec{\sigma} := v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3,$$

$\vec{v}$ 是實係數三維向量形成之方向軸, $\vec{\sigma}$ 爲量子態粒子。

Alice 的儀器, Q 是正 z-軸, R 是正 x-軸。

Bob 的儀器, S 是正 z-軸和正 x-軸夾出之 45 度軸的反向軸, T 是正 z-軸和負 x-軸夾出之 45 度軸。

Charlie 所送出予 Alice 和 Bob 的, 是由

$$\psi = \frac{(1,0)\otimes(0,1) - (0,1)\otimes(1,0)}{\sqrt{2}}. \tag{4.7}$$

定出的 singlet。

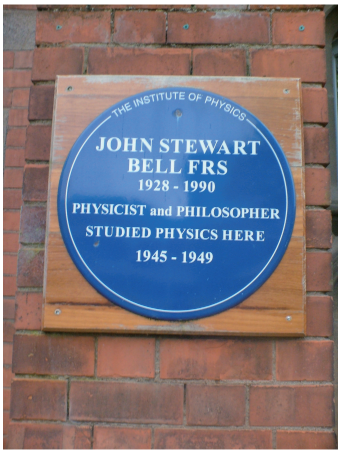
[12] 116 頁云: “簡單計算” 得出以下的 “期望值”, 我們使用馮紐曼的符號

$$\text{Exp}\,(QS;\psi)=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \text{Exp}\,(RS;\psi)=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \text{Exp}\,(RT;\psi)=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \text{Exp}\,(QT;\psi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(提示: 利用局域性, 將上四式中的儀器組, 改寫成四階厄米方陣, 再作用到 (4.7), 請讀者自作)。是以, 我們有

$$\text{Exp}\,(QS;\psi)+\text{Exp}\,(RS;\psi)+\text{Exp}\,(RT;\psi)-\text{Exp}\,(QT;\psi)=2\sqrt{2} \tag{4.8}$$

(4.6) 和 (4.8) 須以實驗判定, 難題在於如何製作出 singlet 且輸送到距離夠遠的 A, B; 並且相同的工作必須能夠重複足夠多次, 以使累積的實驗數據, 產生出有統計學意義的結論。在 1970 年代之後, 實驗技術不斷地精進, 最後終於達成, 前面所述 2022 年諾貝爾物理學獎就是桂冠。只可惜貝爾已逝, 只有紀念碑, 如圖 (取自 Wikipedia: John Stuwart Bell)



我們在以上, 沒有提到一點, 時間, 我們必須設定 Alice 和 Bob 在同一時刻 t 進行其量測; 在理論上與實驗上, 這都是難處。我們在此不討論。

有關貝爾的各項軼事, 高涌泉教授有系列文章 [15]。

結語:

在本文中, 我們所討論的, 是前文中所提過的機率和量子力學相關的議題, 予以較詳細的解說 : 數學定式 (第一節), 波爾和愛因斯坦對量子力學之哲學基礎的對立(第二節), 量子糾纏(第三節), 貝爾不等式 (第四節), 希望能激發讀者一些進一步的研究興趣。

我們現在把標題下方的三句引詞的後半段, 條列如下:

但決斷在乎上主。

就是它是可以理解的。

幾何之基礎的研究, 引出此問題: 以相同態度, 依公理化方式, 處理那些數學扮演重要角色的物質科學; 以機率和力學的理論列爲首要標的。

第一引句出自聖經箴言 16:33; 以神學角度, 敘述命定性和隨機性的交纏。另一個例子, 聖經路得記 2:3 “路得就去拾取麥穗, 恰巧到了波阿斯那塊田裡”。女子路得由於不忍心丟棄婆婆, 兩人由居地流浪到伯利恆, 路得以拾取田裡收成後地上的麥穗爲生, 一日恰巧到財主波阿斯 (他是她婆婆親族) 的田裡, 路得和波阿斯之後成爲夫妻, 他們的曾孫, 就是以色列的第一個君王大衛, 下接馬太福音 1:1 “大衛的子孫, 耶穌基督的家譜· · ·” (註: 法國畫家米勒以此爲本的 1857 年作品 “拾穗” 是極著名的畫作)。

第二引句出自 [5], 351 頁, 愛因斯坦先敘述 “宇宙的恆久之謎, 是它的可理解性 (comprehensibility)”, 他接下來提到大哲學家康德, 和 “可理解性” 這名詞的意思。然後, 他敘述 “It is in this sense that the world of our sense experience is comprehensible. The fact that it is comprehensible is a miracle”。第二引句爲這兩句話的變形流傳語句。

第三引句前段, 出自希爾伯特在第一屆 ICM 所提 23 個問題的第 6 問。他對此 23 個問題的解釋文, 英文版發表於 1902 年美國數學會的 Bulletin [7], 437-479 頁, 後段出現於其中。1933 年數學家 A.N. Kolmogorov 的 [9], 被認爲是解決機率, 此書也是現代公理化機率論的起始; 至於力學, 希爾伯特引用四位物理學家的著作, 沒有觸及量子力學。

愛因斯坦對物理學 (他意指量子力學) 的看法, 在 [4] 的結尾, 他表達: “不可避免的, 物理學的判斷, 必須是對某個別系統的真實描述; 自然 (Nature) 只能被設想成一個單獨存在的系統, 而不是一個系綜”。

另一方面, 波爾對量子力學的看法, 則是：“我不知道量子力學是什麼, 我想我們是在處理能描述我們實驗的某種數學方法”, 這是他對愛因斯坦在第五屆索維爾會議上提問的即席回應, 見 [10], 266 頁。高涌泉教授在其影片 [b] 的結尾, 也提到類似觀點。

参考文獻

1. J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Revised 2nd Edition. Cambridge University Press, 2004.
2. Neals Bohr, Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, October 15, 696-702, Volume 48. Princeton, New Jersey: Institute for Advanced Study, 1935.
3. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, A proposed experiment to test local hidden-variable theory, *Phys. Review Letters*, **49**, 1804-1807, 1969.
4. Albert Einstein, Elementary consideration on the interpretation of the foundation of quantum mechanics; in Scientific Papers Presented to Max Born on his retirement from the Tait Chair of Natural Philosophy in the University of Edinburgh (Ed. Oliver and Boyd), 1953. (arXiv 2011)
5. Albert Einstein, Physics and Reality, *Journal of the Franklin Institute*, Volume 221, Issue 3, March 1936, Pages 349-382.
6. Albert Einstein, Boris Podolsky and Nathan Rosen, Quantum-Mechanical Description

of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, May 15, 777-780, Volume 47. Princeton, New Jersey: Institute for Advanced Study, 1935.

7. David Hilbert, Mathematical Problems, *Bulletin Amer. Math. Soc.* 437-479, 1902.
8. K.-P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, 2nd Edition. Cambridge University Press, 1985.
9. A. N. Kolmogorov, *Foundation of the Theory of Probability* (English translation of 1933 German original version), Chelsea, 1956.
10. M. Kumar, *Quantum — Einstein, Bohr, and the great debate about the nature of reality*, W. W. Norton & Company, 2010.
11. E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, 1967.
12. John von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, English translation. Princeton University Press, 1955.
13. M. A. Nielson and Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2003.
14. K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123, Springer, 1980.
15. 高涌泉。貝爾傳奇 (一) — (七)。科學人 2022 年 7 月 - 2023 年 1 月。
16. 謝南瑞。機率學者看量子力學。數學傳播季刊, 48(4), 66-72, 2024。
17. 謝南瑞。機率學者看量子力學 (二)。數學傳播季刊, 49(1), 43-49, 2025。
18. 謝南瑞。機率學者看量子力學 (三)。數學傳播季刊, 49(2), 42-53, 2025。
19. 謝南瑞。機率學者看量子力學 (四)。數學傳播季刊, 49(3), 51-60, 2025。

網站參考資料

(a) *MIT News*: Famous double-slit experiment holds up when stripped to its quantum essentials; July 28, 2025.

(b) 高涌泉。量子力學究竟怪在哪裡? 海森堡在 100 年前開啟的學問; 臺大科學教育發展中心 CASE (YouTube)。

(c) *Quanta Magazine*: Physicists Take the Imaginary Numbers Out of Quantum Mechanics; November 7, 2025.

—本文作者爲國立台灣大學數學系退休教授—